جبهة (حدود) مجموعة:

تعريف: لتكن A مجموعة جزئية من فضاء متري X و $x \in X$ نسمي x نقطة جبهية أو حدودية للمجموعة A إذا كانت x نقطة لاصقة بالمجموعة A ومتممتها.

بكلام آخر: نسمي x نقطة جبهية أو حدودية إذا كان كل جوار يتقاطع مع A أو متممتها.

★ إن مجموعة النقاط الجبهية أو الحدودية للمجموعة A تسمى جبهة أو حدود المجموعة A ونرمز لها بالرمز $Fr(A)$.

$$Fr(A) = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$$

واضح من التعريف أن $Fr(A)$ مجموعة مغلقة (لأنها تقاطع لمجموعتين مغلقتين).

$Fr(A) = Fr(X \setminus A)$

بالاعتماد على العلاقة $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^{\circ}$ من مبرهنة سابقة البند الثاني سنوجد صيغة لحساب الجبهة.

لدينا:

$$Fr(A) = \bar{A} \cap (\overline{X \setminus A})$$
$$= \bar{A} \cap (X \setminus A^{\circ}) = \bar{A} \cap X \setminus \bar{A} \cap A^{\circ} =$$
$$= \bar{A} \setminus A^{\circ}$$
$$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^{\circ}$$

خارجية مجموعة:

تعريف: لتكن A مجموعة جزئية من فضاء طبولوجي X ، $x \in X$ نقطة من الفضاء نسمي x نقطة خارجية للمجموعة A إذا كانت داخلية في متممة A : $X \setminus A$.

بكلام آخر: نسمي x نقطة خارجية لـ A إذا وجد جوار للنقطة x لا يتقاطع مع A.

★ إن مجموعة النقاط الخارجية للمجموعة A تسمى خارجية A ونرمز لها بالرمز $Ext(A)$

$$Ext(A) = (X \setminus A)^{\circ} = X \setminus \bar{A}$$

حسب المبرهنة السابقة

* من الواضح أن المجموعات A° ، $F_r(A)$ ، Ext هي مجموعات غير متقاطعة مثنى مثنى. واجتماعها مع بعضها يعطي الفضاء كله.

أمثلة:

1) في $\mathbb{R}$: 1) $A=[a,\beta]$

$\bar{A}=A$; $A'=[a,\beta]=A$; $A^\circ=]a,\beta[$

$F_r(A)=\bar{A}\setminus A^\circ=\{a,\beta\}$; $Ext(A)=\mathbb{R}\setminus\bar{A}=\mathbb{R}\setminus A=$

$]-\infty,a[\cup]\beta,+\infty[$

هل المجموعة A مفتوحة؟ A ليست مفتوحة لأنها لا تساوي داخليتها.

هل المجموعة A مغلقة؟ نعم A مجموعة مغلقة لأنها تساوي لصاقتها.

هل المجموعة A كثيفة؟ لا، لأن لصاقتها $\bar{A}$ لا تساوي $\mathbb{R}$.

2) $A=]a,\beta[\cup\{c,d\}$

$A^\circ=]a,\beta[$

$A'=[a,\beta]$ $\bar{A}=[a,\beta]\cup\{c,d\}$; $F_r(A)=\bar{A}\setminus A^\circ=\{a,\beta,c,d\}$

$Ext(A)=\mathbb{R}\setminus\bar{A}=]-\infty,a[\cup]\beta,c[\cup]c,d[\cup]d,+\infty[$

خارجية دائماً مفتوحة لأنها داخلية المتممة

هذه المجموعة ليست مغلقة وليست مفتوحة وليست كثيفة.

3) $\mathbb{Z}$ ....

$\mathbb{Z}^\circ=\varphi$, $\mathbb{Z}'=\varphi$, $\bar{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$, $F_r(\mathbb{Z})=\bar{\mathbb{Z}}\setminus\mathbb{Z}^\circ=\mathbb{Z}$

$Ext(\mathbb{Z})=\mathbb{R}\setminus\bar{\mathbb{Z}}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ المجالات المفتوحة الواقعة بين النقاط

$=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n,n+1[$

هي ليست مفتوحة وهي مغلقة وليست كثيفة.

٤

Q

$Q^{\circ} = \varphi$; $Q' = R$; $\overline{Q} = R$; $Fr(Q) = \overline{Q} \setminus \mathring{Q} = R \setminus \varphi = R$

$Ext(Q) = \varphi$

٥ لنأخذ الفضاء المتري المنقطع

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & ; x \neq y \\ 0 & ; x = y \end{cases}$$

المجموعة وحيدة العنصر تشكل مجموعة مفتوحة $B(a,r) = \{a\}\ (r \leq 1)$ أي كرة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

المجموعات وحيدة العنصر في هذا الفضاء هي مجموعات مفتوحة ينتج من ذلك أي مجموعة في هذا الفضاء هي مجموعة مفتوحة السبب أي مجموعة هي اجتماع لعناصرها وأي اجتماع لمجموعات مفتوحة هي مجموعة مفتوحة $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$.

وما هي المجموعات المغلقة في هذا الفضاء علماً أن كل المجموعات مفتوحة.

يوجد من المجموعات المغلقة بقدر ما يوجد من المجموعات المفتوحة.

في هذا الفضاء كل المجموعات مفتوحة ومغلقة.

لتكن A مجموعة جزئية فعلية $A \neq \varphi$ و $X \neq A$ في هذا الفضاء لأن كل المجموعات مغلقة $\overline{A} = A$ ولأن كل المجموعات مفتوحة $\mathring{A} = A$

$A' = \varphi$; $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \varphi$ و $Ext(A) = X \setminus A$

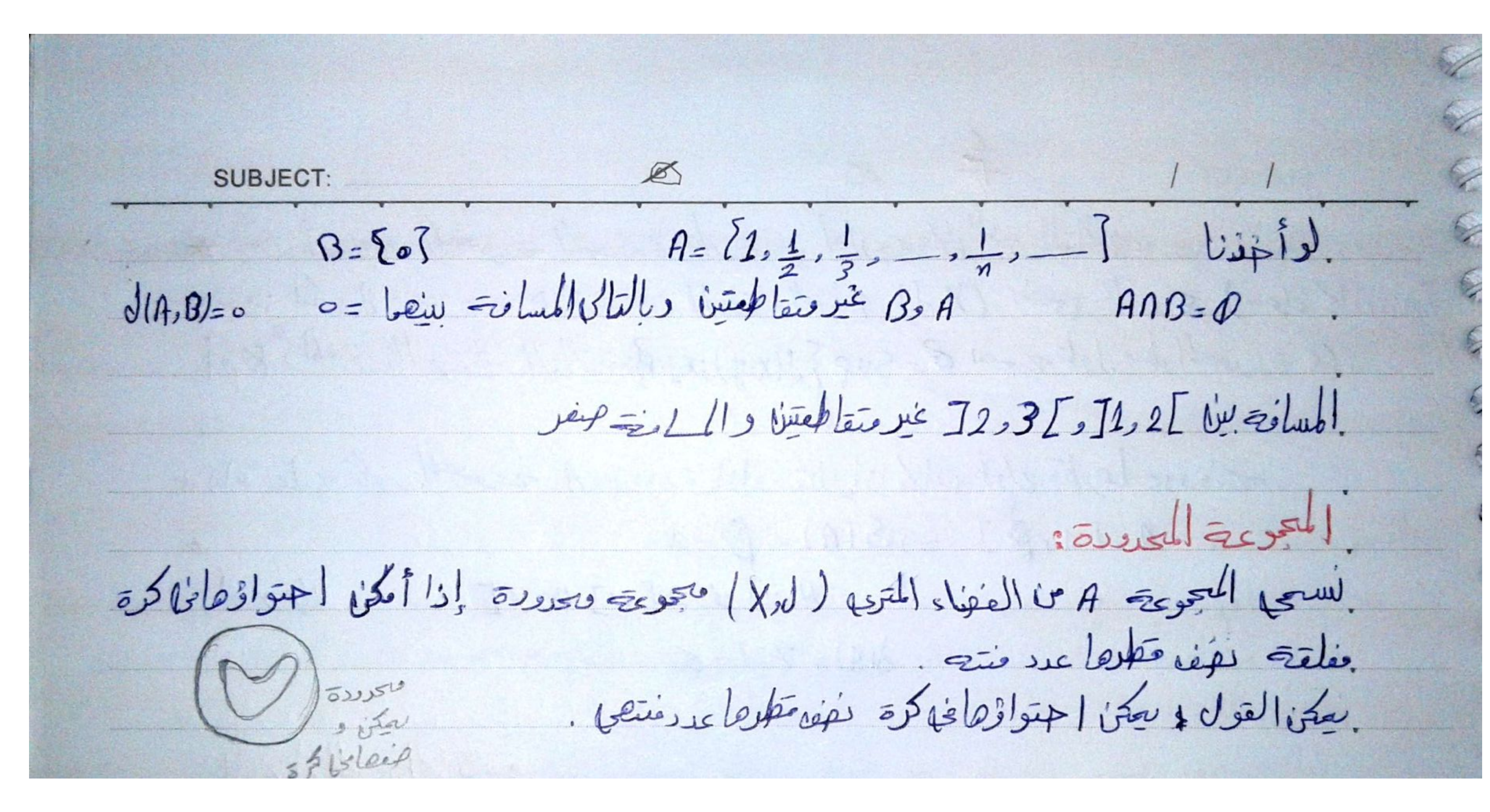
المسافة بين مجموعتين:

لتكن A,B مجموعتين من فضاء متري X إن المسافة بين المجموعتين d(A,B) بالتعريف هي الحد الأدنى الأعظمي للمسافات بين a,b

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A ; b \in B\}$$

المسافة بين أقرب نقطتين.

- بفرض A مؤلفة من نقطة واحدة عندها نحصل $A = \{a\}$ $d(a,B)$ إذا كانت المجموعتان متقاطعتين $A \cap B \neq \varphi$ والمسافة بينهما صفر $d(A,B) = 0$ في الحالة العامة العكس غير صحيح.



لو أخذنا $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\}$ $\quad B=\{0\}$

$A\cap B=\emptyset$ $\quad$ A و B غير متقاطعتين وبالتالي المسافة بينهما = 0 $\quad d(A,B)=0$

المسافة بين $]1,2[$ و $]2,3[$ غير متقاطعتين والمسافة صفر

المجموعة المحدودة:

نسمي المجموعة A من الفضاء المتري (X,d) مجموعة محدودة إذا أمكن احتواؤها في كرة مغلقة نصف قطرها عدد منتهٍ.

يمكن القول: يمكن احتواؤها في كرة نصف قطرها عدد منتهي.